חלק א': סמן את התשובה הנכונה **<u>היחידה</u>** לכל שאלה (6 נקודות לכל תשובה נכונה).

שאלות 1,2,3 מתייחסות לפונקציה $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ המוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$.

1. סמנו את הטענה הנכונה:

א) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

ב) $f_y(0,0) \neq 0 \ , \ f_x(0,0) = 0$.

ג) $f_x(0,0) \neq 0 \ , \ f_y(0,0) = 0$.

ד) $f_x(0,0)$ ו-$f_y(0,0)$ אינן קיימות.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$ בנקודה (0,0) ובכיוון הווקטור $\vec{a} = (\cos\theta\,, \sin\theta)$ שווה ל-

א) 0 עבור כל ערך של θ

ב) $\cos^{\frac{1}{3}}\theta\,\sin^{\frac{2}{3}}\theta$ עבור כל ערך של θ

ג) 0 רק עבור $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$

ד) $\cos^{\frac{1}{3}}\theta\,\sin^{\frac{2}{3}}\theta$ רק עבור $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$

3. איזו טענה מבין הטענות הבאות, נכונה?

א) ל-f נגזרות חלקיות רציפות ב-(0,0).

ב) f אינה דיפרנציאבילית ב-(0,0).

ג) f לא רציפה ב-(0,0).

ד) $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(0,0) = \big(f_x(0,0), f_y(0,0)\big) \cdot (\cos\theta\,, \sin\theta)$

שאלות 4-7 מפנות לנתונים הבאים:

יהי V הגוף החסום ע"י המשטחים z=1 , z=0 ו- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a,b>0). תהי S השפה של V ונסמן ב-S_0 את החיתוך של V עם המישור z=0, ב-S_1 את החיתוך של V עם המישור z=1 וב-S_2 את החיתוך של V עם המשטח $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. נסמן בנוסף: $C_1=S_1\cap S_2$, $C_0=S_0\cap S_2$. נתון השדה:

$$\vec{F}(x,y,z)=5y\hat{\imath}+3xz\hat{\jmath}+xz\hat{k}$$

4. האינטגרל $\oint_{C_0}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ בניגוד לכיוון השעון במבט מלמעלה שווה ל-

א) $-5\pi ab$ ב) $5\pi ab$ ג) 0 ד) $-10\pi ab$

5. האינטגרל $\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ בניגוד לכיוון השעון במבט מלמעלה שווה ל-

א) πab ב) $-\pi ab$ ג) $-2\pi ab$ ד) $2\pi ab$

6. האינטגרל $\iiint_V \nabla\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})dxdydz$ שווה ל-

א) πab ב) $-\pi ab$ ג) 0 ד) $2\pi ab$

7. האינטגרל $\iint_{S_2}(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,dS$ כאשר הנורמל $\hat{n}$ פונה תמיד כלפי חוץ, שווה ל-

א) $3\pi ab$ ב) $-3\pi ab$ ג) $7\pi ab$ ד) $-7\pi ab$

8. הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\frac{\ln(1-\sqrt{xy})}{x^2+y^2}$$

שווה ל-

א) 0 ב) 1 ג) לא קיים ד) $-\infty$

9. שני העקומים:

$$L_1 = \{x(t) = t^2 , y(t) = 2t - 1 , z(t) = (1-t)^2 \ \mid \ t \in \mathbb{R}\}$$
$$L_2 = \{ x(s) = s + 1 , \ y(s) = (1+s)^2 \ , \ z(s) = 2s \ \mid \ s \in \mathbb{R} \}$$

מוכלים במשטח אחד S . מהו המרחק בין המישור המשיק ל-S, העובר בנקודת החיתוך של L_1 ו-L_2, לבין הראשית? (מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור ax+by+cz+d=0 הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$)

א) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ב) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ג) 0 ד) $\frac{1}{3}$

חלק ב': יש לענות על שתי השאלות הבאות (כל שאלה שווה 23 נקודות). נמקו את תשובותיכם תוך ציטוט המשפטים עליהם אתם מסתמכים:

10. א) מצאו את כל הנקודות ב-$\mathbb{R}^2$ בהן מתקבל מינימום מקומי, מקסימום מקומי או אוכף של הפונקציה:

$$f(x,y) = 2xy - |x| - y .$$

ב) האם ל-$f(x,y)$ יש מינימום מוחלט ב-$\mathbb{R}^2$? מקסימום מוחלט ב-$\mathbb{R}^2$?

ג) מצאו את המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה:

$$g(x,y) = 2xy - x - y$$

בתחום: $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$.

11. נתון השדה הווקטורי:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

א) חשבו את $div\vec{F}$ לכל $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

ב) חשבו את $rot\vec{F}$ לכל $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

ג) יהי S חלק המשטח $z = 1 - \frac{(1-x^2-y^2)^{100}}{2}$ שנמצא בתוך התחום $x^2 + y^2 \le 1$, במבט מלמעלה.

חשבו: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ כאשר C השפה של S נגד כיוון השעון.

ד) חשבו: $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ כאשר L העקום $\{x^2 + y^2 = 1 , z = 0\}$ נגד כיוון השעון (במבט מלמעלה).

ה) חשבו את $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ כאשר $\hat{n}$ הוא הנורמל ל-S שלו רכיב z חיובי.

פתרון שאלה 10

א. $f(x,y)=\begin{cases} 2xy-x-y & x\geq 0 \\ 2xy+x-y & x<0 \end{cases}$

$x>0$: $f_x=2y-1$ $\quad f_y=2x-1$

$x<0$: $f_x=2y+1$ $\quad f_y=2x-1$

נקודת חשד: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ (כי $x\neq 0$)

$f_{yy}=0$, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=2$ לכן $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ נקודת אוכף

כי $H=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4<0$ ומבחן הסדרתי לעצירה אל מקסימום מקומי $H\geq 0$

לא מתקיים.

כש $x=0$ $f(0,y)=-y$ לכן גם שם אין נקודת קיצון אל אוכף.

ב. בדר' אל $f(0,y)=-y$ | $\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y)=\mp\infty$.

ג. ראינו בא' שאין נקודת פנימית חשודה לכן המינימום המוחלט למקסימום המוחלט מתקבלים על השפה $x^2+y^2=1$.

נשתמש לפתרון זה באלף וקפלן:

$L(x,y,\lambda)=2xy-x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$

$L_x=2y-1+2\lambda x=0$

$L_y=2x-1+2\lambda y=0$

$\lambda=\frac{1-2y}{2x}=\frac{1-2x}{2y}$

לכן: $2y-4y^2=2x-4x^2$ אל $2(x^2-y^2)=x-y$

$2(x-y)(x+y)=x-y$ לכן אל $x=y$ אל $x+y=\frac{1}{2}$

כש $x=y$ נקבל: $(\frac{1}{12},\frac{1}{12})$, $(-\frac{1}{12},-\frac{1}{12})$

יוצר מוסיף מלמד מתמטיקה, מדעי המחשב ופיזיקה

אולם $x+y=\frac{1}{2}$ נציב במשלב ונקבל: $2x^2-x-\frac{3}{4}=0$ לכן:

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$ ו $y_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{7}}{4}$ בהתאמה.

$$f\left(\frac{1\pm\sqrt{7}}{4},\frac{1\mp\sqrt{7}}{4}\right)=2\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{12}}\quad,\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=1+\frac{2}{\sqrt{12}}$$

בנוסף יש לבדוק את הקצוות בקצה: $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$.

$$f(0,1)=f(1,0)=-1\quad,\quad f(-1,0)=f(0,-1)=1$$

לסיכום המקסימום הוא $1+\frac{2}{\sqrt{12}}$ המינימום הוא $-\frac{5}{4}$.

יואב דוגמה לפתרון מלא יותר לכל הסעיפים ובכל הפרק

שאלה 11

א. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

נעשה סימטריה

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{-2y^2+x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{-2z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

לכן $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

ב. $$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

נשקלו סימטריה
אל הנגזרות הישר
מהנה.

ג. נשתמש בנוסחת גאוס מעל המסלול $\underbrace{S_1 \cup S}_{V \text{ נפח מעל}}$ כאשר S_1
הוא המישור $z=1$, $x^2+y^2 \le 1$. $\operatorname{div}\vec{F}=0$, $\vec{F}\in C^1$ בתחום
גם שם $z \ge \frac{1}{2}$ לכן $(0,0,0)$ אינו בתחום. לפיכך:

$$\iint_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V 0\,dx\,dy\,dz = 0$$

לכן $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = -\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ כשהנורמלות הוא לפי חוץ.

הנורמל $\vec{n}$ של S הוא לפי כיוון חשלילי של ציר z (כיוון ה z-ים
שלו שלילי כי z גדל כש x,y גדלים). הנורמל החיצוני של S_1 הוא
כיוון חיובי של ציר z לכן יש לחשב את $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$
כש $\vec{n}$ בכיוון חיובי של ציר z. כאינטרפרטציה של S_1 נקבל

$$S_1 = \{\vec{r}=(x,y,1) \mid x^2+y^2\le 1\}$$

נקבל: $\vec{n}=\vec{r}_x\times\vec{r}_y=(1,0,0)\times(0,1,0)=(0,0,1)$ לכן:

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\cdot(0,0,1)\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$$

$$\underset{\substack{\text{לאלגנטי לפולרי}\\ J=r}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+1)^{3/2}}=\int_0^{2\pi}-(r^2+1)^{-1/2}\Big|_0^1\,d\theta=2\pi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}--1\right)=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2. לפי סטוקס, נמצאים ב $\vec{F}\in C^1$ ו S | $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ נבחר

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=0,$$

3. שוב לפי סטוקס: נוכל להשתמש ב כי קיים משטח $\tilde{S}$ ו L שמהווה ושלו $\vec{F}\in C^1$. לעומת, מלוך אלון של כיסוי כדור ברדיוס 1 סביב $(0,0,0)$.

שים לב! השולים יחתכו לפני הסריקה. לכן, חל איסור מוחלט לכתוב כאן.